

Γεωμετρία

15/4/2019

§ Καμπύλες και επιφάνειες 2^{ου} βαθμού

Πρόβλημα ① Στο επίπεδο $\mathbb{R}^2$ θεωρούμε ορθογώνιο σύστημα Oxy .
Να βρεθεί ο γεωμετρικός τύπος των αλφειών $P(x, y)$
που πληρούν την εξίσωση

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

όπου $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}$

Πρόβλημα ② Τι παριστάνει στον χώρο $\mathbb{R}^3$ η εξίσωση

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{34} = 0$$

όπου $a_{ij} \in \mathbb{R}$

① Τετραγωνικές καμπύλες στο $\mathbb{R}^2$

① Κύκλος: κέντρο $K(a, \rho)$ και ακτίνα R .

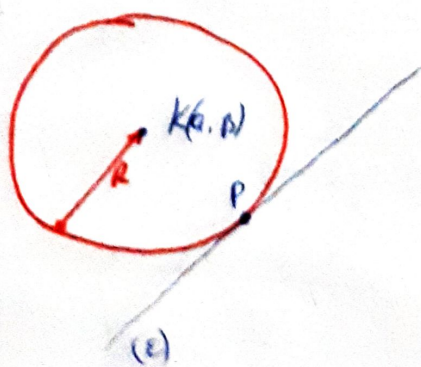
Κανονική εξίσωση

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

Αναλυτική εξίσωση

$$x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$$

κέντρο $K(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2})$ και ακτίνα $R = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2}$

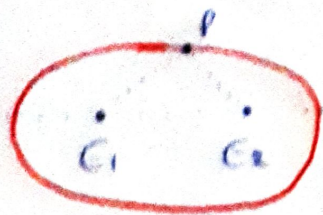


Εφαπτομένη ευθεία στο αλφείο

$P(x_0, y_0)$ δίνεται από την εξίσωση

$$(x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) = R^2$$

- ② Ελλειψη με εστίες E_1 και E_2 ονομάζουμε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων του επιπέδου με την ιδιότητα:



$$d(P, E_1) + d(P, E_2) = \text{σταθερό} = 2a \quad (*)$$

Ας βρούμε την εξίσωση της ελλειψος. Ας δεσμεύσουμε $d(E_1, E_2) = 2c$ χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα E_1, E_2 βρίσκονται στον Ox άξονα και ότι $E_1(-c, 0)$ και $E_2(c, 0)$.

Επομένως, αν $P(x, y)$ τυχαίο σημείο της ελλειψος $\rightarrow$

$$d(P, E_1) = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$d(P, E_2) = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Η εξίσωση (*) λαμβάνει την μορφή:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

~~$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$~~

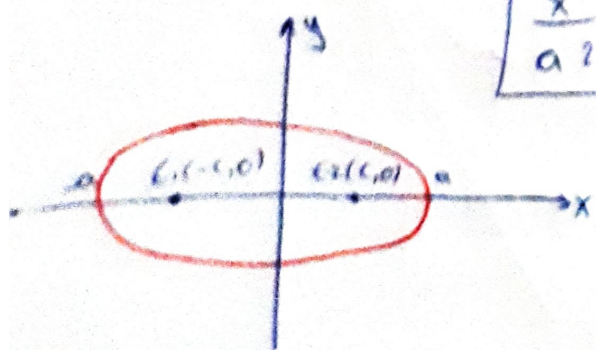
~~$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$~~

υψώνω στο τετράγωνο

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

όπου $b^2 = a^2 - c^2$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



$$y=0 \rightarrow \frac{x^2}{a^2} = 1 \Rightarrow x^2 = a^2$$

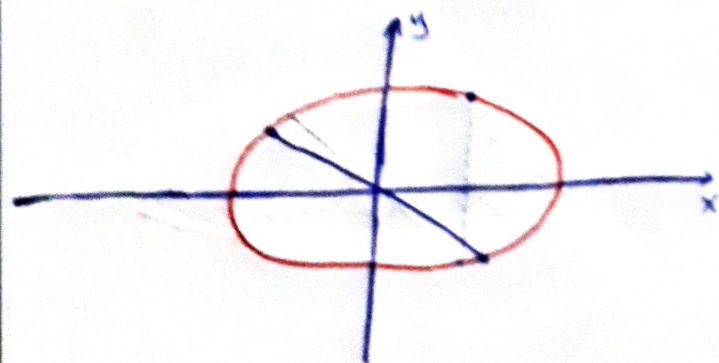
$$x=0 \rightarrow \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y^2 = b^2$$

• Οι αποστάσεις a, b προσδιορίζουν τα ημιάξονες a και b της ελλείψης ως προς τους άξονες. Για αυτό το λόγο ονομάζονται μεικροί άξονες.

• Ο αριθμός $e = \frac{c}{a}$ λέγεται εκκεντρότητα της ελλείψης.

Ιδιότητες της Έλλειψης.

• Η έλλειψη είναι αμφιμοναχική ως προς τους άξονες Ox, Oy και αμφιμοναχική ως προς το O .

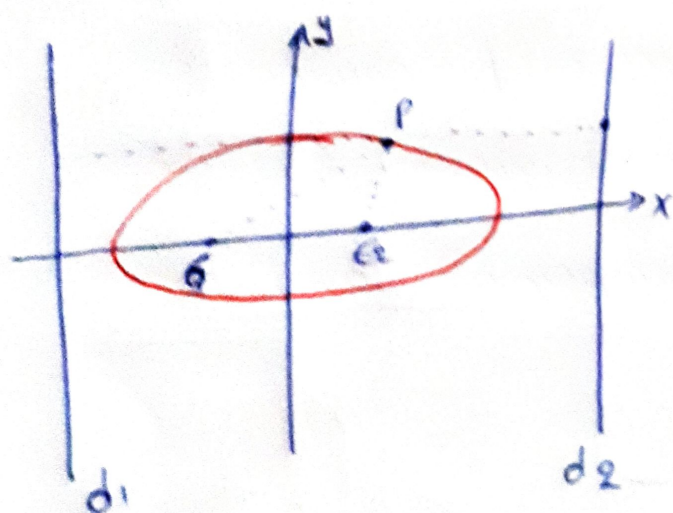


ορισμός: Οι ευθείες

$$d_1: x = -\frac{a^2}{c}$$

$$d_2: x = +\frac{a^2}{c}$$

λέγονται διευθετούσες της ελλείψης.

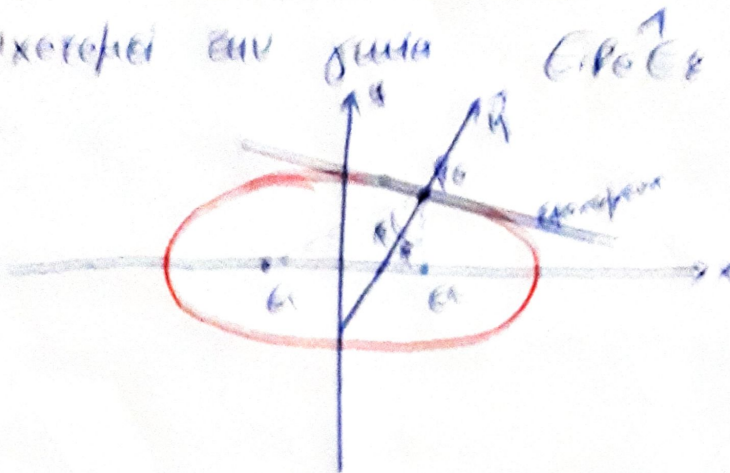


Παράδειγμα: Για κάθε σημείο της ελλείψης ισχύει

$$\frac{d(P, F_1)}{d(P, d_1)} = \frac{d(P, F_2)}{d(P, d_2)} = e$$

Η εφ' όλης της τάξης ελλείπει
αφ' ότου $P(x_0, y_0)$ είναι η ελπίς με ελπίδα
το εφ' όλης της τάξης $\vec{q} = \left(\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2} \right)$ ισχύει από εφ' όλης της τάξης

Σημείωση: Η καθεμία ενότητα της εδαφικής στρώσης μπορεί να διχοτομείται ενώ πάντα $C \leq C_k$



Ympödy: Aivanen ja uhlari $\in_1$ tai $\in_2$ on olemassa $2C \neq 0$,
 kus $d(C, C) = 2C$

Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων P του επιπέδου με
των ιδιοτήτων $|d(P, E_1) - d(P, E_2)| = 0,100000 - 2a$

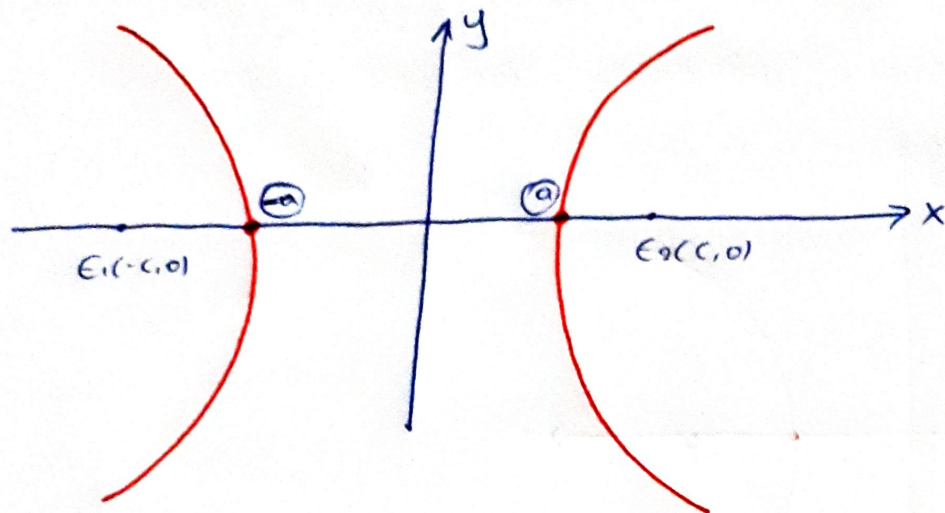
Αρθεται να ερρωθ με τους τα υπηρεια Ε. και Ε2

Παρατήρηση: ① Εάν $\boxed{a \neq c}$, τότε ο γεωμετρικός τόπος είναι δύο υμνότητες



② Ag^+ and F^- ions are AgF O.E.C.

- ③ Ας υποθέσουμε ότι $a < c$. Τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ένα ωακία αντεταγμένων έτσι ώστε τα E_1 και E_2 να βρίσκονται στα άξονα Ox και $E_1(-c, 0)$ και $E_2(c, 0)$.



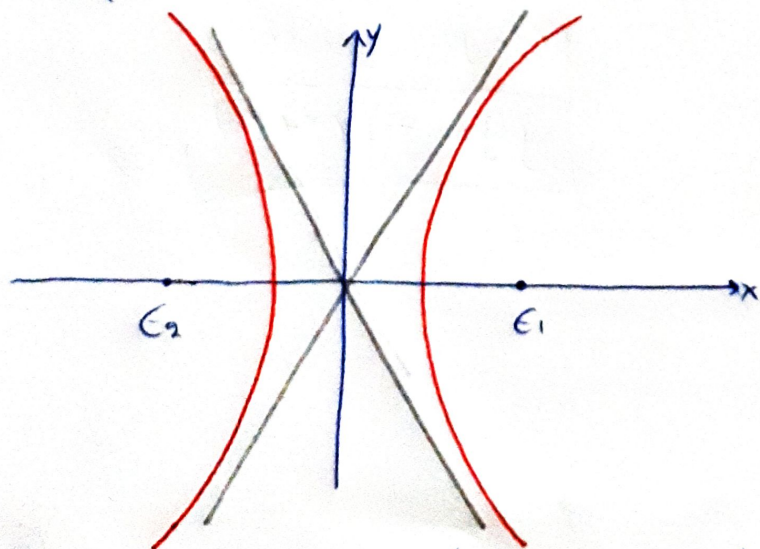
Σε αυτή την περίπτωση, η εξίσωση $|d(P, E_1) - d(P, E_2)| = 2a$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1.$$

Τα σημεία $A'(-a, 0)$ και $A(a, 0)$ ονομάζονται κορυφές της υπερβολής.

Ιδιότητες:

- Η υπερβολή είναι συμμετρική ως προς τους άξονες και ως προς το κέντρο O του $\mathbb{R}^2$.



Οι ευθείες

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$$

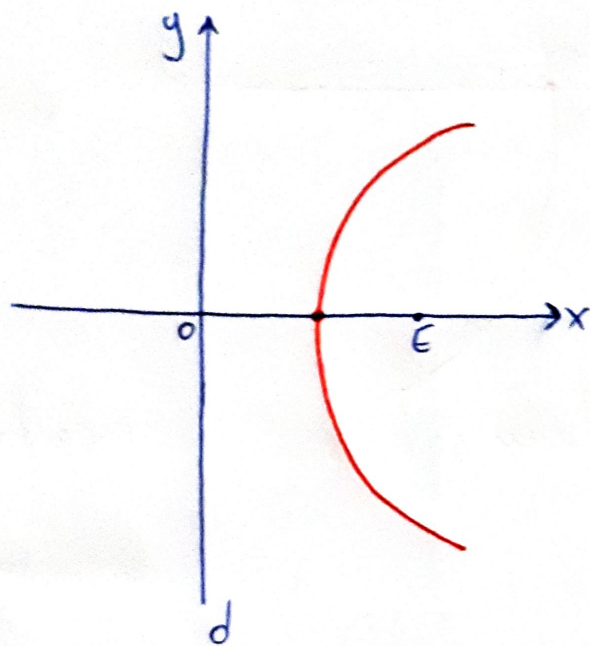
και

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$$

λεγονται ασυμπτωτές της υπερβολής.

- Η εξίσωση της εφαπτομένης σε ένα σημείο $P_0(x_0, y_0)$ είναι $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$.

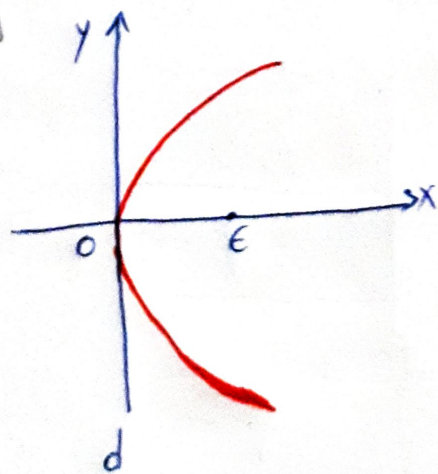
④ Παραβολή: Δίνεται σημείο E και ευθεία d , που δεν περνάει
 το E . Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που
 έχουν ίδια απόσταση από το E και από την
 ευθεία d , λέγεται παραβολή με εστία το E
 και διευθέτωση την ευθεία d .



Ειδικότερα κατάλληλο
 σύστημα αναφοράς
 ή εξίσωση της παραβολής
 είναι:

$$y^2 = 2px$$

Συν. αλλαζόμε
 αν ~~πλάτος~~ την αρχή έχουμε αυτόν τον τύπο
 της παραβολής.

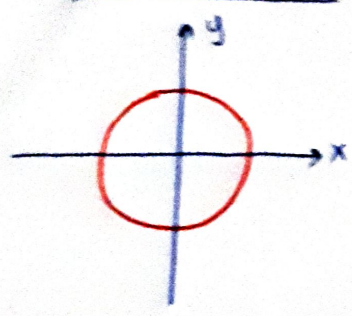


Η εφελκυστική της
 παραβολής στο σημείο
 $P(x_0, y_0)$ είναι

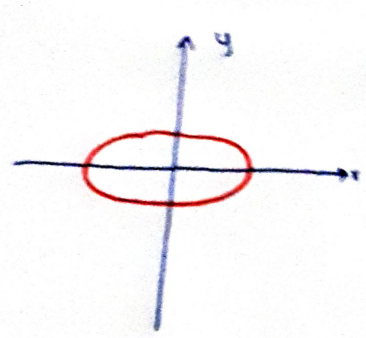
$$yy_0 = p(x + x_0)$$

10/10

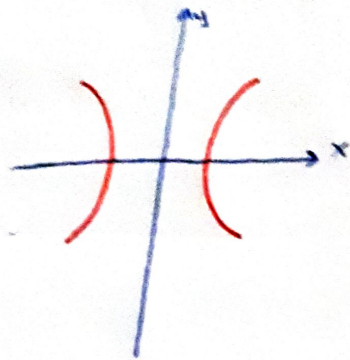
ενοψιογραφία



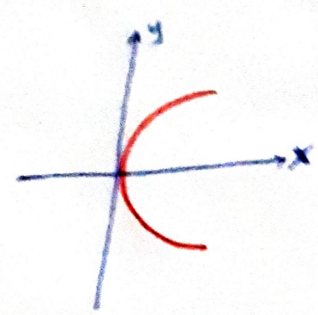
ΚΥΚΛΟΣ



ΕΛΛΕΙΨΗ

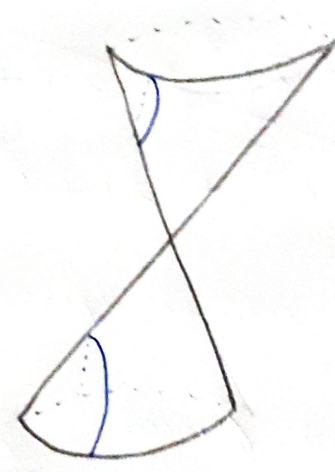
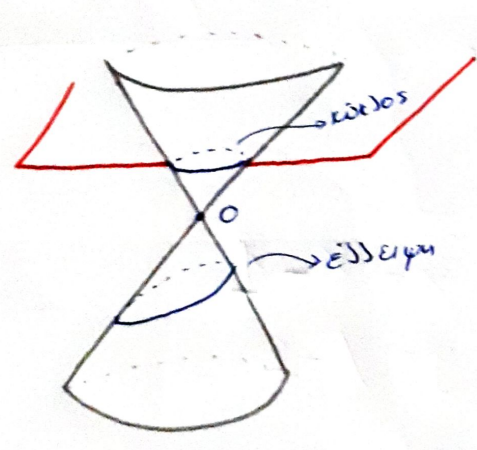


ΥΠΕΡΒΟΛΗ



ΠΑΡΑΒΟΛΗ

Οι κορυφές αυτές λέγονται κωνικές τομές διότι προκύπτουν ως τομή ενός κώνου με ένα επίπεδο.



$x^2 = y^2$
 $x^2 - y^2 = 0$
 $(x-y)(x+y) = 0$

Είναι αυτοί οι δύο άξονες

$xy = 0$

Είναι αυτοί οι δύο άξονες

Θυμάστε ότι θέλαμε να μελετήσουμε την Εξίσωση $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$

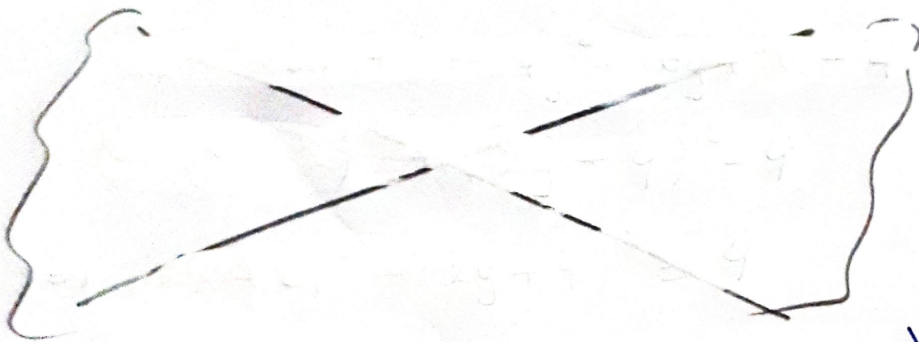
Παραδείγματα Τι παριστάνει η Εξίσωση

$$x^2 + 4y^2 + 2x + 16y + 13 = 0$$

Λίνα: (όταν η Εξίσωση δεν έχει τον όρο xy , τότε με αμνημόνεια τετραγωνίζουμε την ανόμοια σε αλγή μορφή.)

Έχουμε

$$0 = x^2 + 4y^2 + 2x + 16y + 13$$



$$\Rightarrow \left(\frac{x+1}{4}\right)^2 + (y+2)^2 = 1$$

κάνοντας την παράλληλη μεταφορά $x = X - 1$

$$y = Y - 2$$

τότε η Εξίσωση γίνεται

$$\frac{X^2}{4} + Y^2 = 1$$

Ελλειψη

